# Deeltoets 1, Calculus 2 voor MST

Donderdag 11 december 2014, 13:30–15:30

Docent: dr. P. J. Bruin

- Vermeld op elk antwoordblad **duidelijk leesbaar** uw naam (met voornaam en voorletters), studentnummer(s) en studie(s).
- U mag een (grafische) rekenmachine en een formulekaart gebruiken.
- Eindantwoorden alleen tellen niet. Een goede motivatie en/of berekening is vereist. Controleer zoveel mogelijk uw antwoorden.
- Indicatieve normering: bij iedere opgave staat het aantal punten vermeld, het totaal is 100 punten.

**Deze toets bestaat uit *zeven* opgaven.**

Succes!

---

**1** (10). Bereken van elk van de onderstaande functies de partiële afgeleiden naar $x$ en $y$.

(a) $f(x, y) = e^{x+\cos y}$.

(b) $g(x, y) = \ln(x^2/y)$.

**2** (15). Gegeven is de functie

$$f(x, y) = \sin(x + y) \ln(2 - \cos y).$$

(a) Laat met een berekening zien dat de gradiënt $\vec{\nabla} f(a, 0)$ van $f$ in het punt $(a, 0)$ de nulvector is voor alle waarden van $a$.

(b) Bepaal de richtingsafgeleide $(\mathrm{D}_{\vec{u}} f)(0, \pi)$ van $f$ in het punt $(0, \pi)$ in de richting van de eenheidsvector $\vec{u} = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$.

**3** (15). Gegeven is de functie

$$f(x, y) = y^2 + y - x^3 + x^2.$$

(a) Bepaal een vergelijking voor het raakvlak aan de grafiek van $f$ in het punt $(2, 3, 8)$.

(b) Gebruik een lineaire benadering om $f(2{,}1,\ 2{,}95)$ te benaderen.

**Ga verder op de achterkant.**

**4** (15). Gegeven is de functie

$$f(x,y) = (y^2 - y)e^{-x}$$

op het vierkante domein

$$R\colon \quad 0 \le x \le 1 \quad \text{en} \quad 0 \le y \le 1.$$

Bepaal het globale maximum en het globale minimum van $f$ op $R$.

**5** (15). Gegeven is de functie

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - y^2 - 12x.$$

(a) Laat zien dat $f$ precies vier kritieke punten heeft, namelijk

$$(-2,0), \quad (2,0), \quad (1,-3), \quad (1,3).$$

(b) Bepaal van elk van deze kritieke punten of ze een lokaal maximum, een lokaal minimum of een zadelpunt zijn.

**6** (15). Gegeven is het gebied $R$ dat ingesloten wordt door de $y$-as en de kromme $x = y(2-y)$.

(a) Schets het gebied $R$.

(b) Bereken de oppervlakte van $R$.

(c) Gegeven is de functie $f(x,y) = y^2$ op $R$. Bereken de oppervlakte-integraal $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ van $f$ over $R$.

**7** (15). Het gebied $R$ in het $(x,y)$-vlak is gedefinieerd door

$$R\colon \quad 0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 2 \quad \text{en} \quad z = 0.$$

Het driedimensionale domein $T$ is gedefinieerd als het gebied tussen $R$ en de grafiek van de functie $z(x,y) = x + 1$ op $R$.

(a) Schets het gebied $T$.

(b) Gegeven is de functie $f(x,y,z) = yz$ op $T$. Bereken de volume-integraal $\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dV$ van $f$ over $T$.

# Deeltoets 1, Calculus 2 voor MST

17 december 2014, 13:30 – 15:30

Docent: Peter Bruin

Uitwerkingen

De puntenaantallen in de marge zijn een indicatie voor wat elke stap in de voorbeelduitwerking waard is.

1. a) $f(x,y) = e^{x+\cos y}$

$f_x(x,y) = e^{x+\cos y} \cdot 1$ (kettingregel)

$f_y(x,y) = e^{x+\cos y} \cdot (-\sin y)$ ( " ) 5

b) $g(x,y) = \ln(x^2/y)$

$g_x(x,y) = \dfrac{1}{x^2/y} \cdot \dfrac{2x}{y} = \dfrac{2}{x}$ ( " )

$g_y(x,y) = \dfrac{1}{x^2/y} \cdot -\dfrac{x^2}{y^2} = -\dfrac{1}{y}$ ( " ) 5

(alternatief: eerst omschrijven tot $g(x,y) = 2\ln x - \ln y$)

2. $f(x,y) = \sin(x+y)\ln(2-\cos y)$

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x+y)\cdot 1 \cdot \ln(2-\cos y)$ (kettingregel) 2

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(x+y)\cdot 1 \cdot \ln(2-\cos y)$ (productregel,
$+ \sin(x+y)\cdot\frac{1}{2-\cos y}\cdot \sin y$ kettingregel) 2

$(a,0)$ invullen; merk op dat $\cos 0 = 1$ en $\ln 1 = 0$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \cos(a)\cdot\ln(2-1) = 0$ 1

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \cos(a)\cdot\ln(2-1) + \sin(a)\cdot\frac{1}{2-1}\cdot\sin 0$ 1
$= 0$

$\Rightarrow \vec{\nabla} f(a,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,0), \frac{\partial f}{\partial y}(a,0)\right) = (0,0)$ 1

b) $(0,\pi)$ invullen; merk op dat $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi) = \cos(\pi)\cdot\ln(3) = -\ln(3)$ 1

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) = \cos(\pi)\cdot\ln(3) + \sin(\pi)\cdot\frac{1}{3}\cdot\sin(\pi)$
$= -\ln(3)$ 1

$\Rightarrow \vec{\nabla} f(0,\pi) = (-\ln(3), -\ln(3))$ 2

$D_{\vec{u}} f(0,\pi) = \vec{\nabla} f(0,\pi)\bullet\vec{u}$ 2
$= (-\ln(3), -\ln(3))\bullet\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$
$= -\frac{5}{13}\ln(3) - \frac{12}{13}\ln(3)$
$= -\frac{17}{13}\ln(3)$ 2

3. $f(x,y) = y^2 + y - x^3 + x^2$

a) Vergelijking raakvlak: [kleine variaties mogelijk]

$z = f(2,3) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,3)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)(y-3)$ 3

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3x^2 + 2x$ en 1

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 1$ 1

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = -3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = -8$ en 1

$\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ 1

$f(2,3) = 3^2 + 3 - 2^3 + 2^2 = 8$ [is overigens gegeven]

Raakvlak: $z = 8 + (-8)(x-2) + 7(y-3)$ 1

b) Lineaire benadering van $f(2{,}1,\ 2{,}95)$:

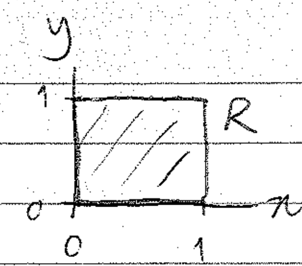
$$\begin{aligned} f(2{,}1,\ 2{,}95) &= f(2,3) + \Delta f \\ &\approx f(2,3) + df \qquad 3 \\ &= f(2,3) - 8\,dx + 7\,dy \qquad 1 \end{aligned}$$

[berekenen of verwijzen naar (a)]

$dx = 2{,}1 - 2 = 0{,}1$ en $dy = 2{,}95 - 3 = -0{,}05$ 1

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(2{,}1,\ 2{,}95) &\approx 8 - 8 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot (-0{,}05) \\ &= 8 - 0{,}8 - 0{,}35 = 6{,}85 \qquad 2 \end{aligned}$$

4. $f(x,y) = (y^2 - y)e^{-x}$




Om de globale extrema van $f$ te bepalen:

- bereken inwendige kritieke punten
- bereken extrema op de rand
- vergelijk functiewaarden

$\frac{\partial f}{\partial x} = -(y^2-y)e^{-x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = (2y-1)e^{-x}$ 2

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff y^2 - y = 0 \iff y = 0$ of $y = 1$ 1

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff 2y - 1 = 0 \iff y = \frac{1}{2}$ 1

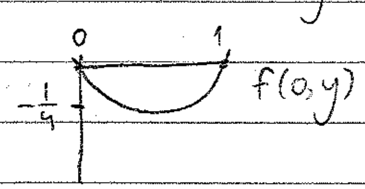
$\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ nooit tegelijk 0 $\Rightarrow$ geen inwendige kritieke punten! 2

De rand bestaat uit 4 segmenten:

- $y = 0, \quad 0 \le x \le 1: \quad f(x,0) = 0$ 1

- $y = 1, \quad 0 \le x \le 1: \quad f(x,1) = 0$ 1

- $x = 0, \quad 0 \le y \le 1: \quad f(0,y) = y^2 - y$




inwendige extrema:

$0 = \frac{d}{dy} f(0,y) = 2y - 1 \iff y = \frac{1}{2}$

$f(0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

op de rand: $f(0,0) = f(0,1) = 0$ 2

- $x = 1, \quad 0 \le y \le 1: \quad f(1,y) = (y^2 - y)e^{-1}$

Dit is dezelfde functie als op de vorige rand, maar dan vermenigvuldigd met $e^{-1}$ $\Rightarrow$ minimum $-\frac{1}{4}e^{-1}$, max. 0 2

Vergelijken we alle gevonden waarden, dan zien we dat het globale maximum 0 is en het globale minimum $-\frac{1}{4}$. 3

5. $f(x,y) = x^3 + xy^2 - y^2 - 12x$

a) Kritieke punten van $f$: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ òf een van $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ bestaat niet.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 12 \qquad 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - 2y \qquad 1$$

Eerst $\frac{\partial f}{\partial y}$ aan 0 gelijk stellen:

$$0 = 2xy - 2y = 2y(x-1)$$

$$\Longleftrightarrow y = 0 \quad \text{of} \quad x = 1 \qquad 2$$

Deze twee gevallen in $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ substitueren:

$\underline{y=0}$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 3x^2 - 12$

dit is $0 \Longleftrightarrow x^2 = 4 \Longleftrightarrow \underline{x=2}$ of $\underline{x=-2}$ 1

$\underline{x=1}$: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,y) = y^2 - 9$

dit is $0 \Longleftrightarrow y^2 = 9 \Longleftrightarrow \underline{y=3}$ of $\underline{y=-3}$ 1

Dus 4 kritieke punten: $(2,0)$, $(-2,0)$, $(1,3)$, $(1,-3)$.

b) De tweede-orde partiële afgeleiden zijn

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6x \qquad 1$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2y \quad \left[\text{of } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] \qquad 1$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2x - 2 \qquad 1$$

Voor elk kritiek punt $(a,b)$ berekenen we

$A = f_{xx}(a,b)$, $B = f_{xy}(a,b)$, $C = f_{yy}(a,b)$

en $\Delta = AC - B^2$:

| | $A = 6x$ | $B = 2y$ | $C = 2x-2$ | $\Delta = AC-B^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $(-2,0)$ | $-12$ | $0$ | $-6$ | $72$ |
| $(2,0)$ | $12$ | $0$ | $2$ | $24$ |
| $(1,-3)$ | $6$ | $-6$ | $0$ | $-36$ |
| $(1,3)$ | $6$ | $6$ | $0$ | $-36$ |

3

Classificatie van de kritieke punten:

$(-2,0)$: $\Delta > 0$, $A < 0$ $\Rightarrow$ lokaal maximum

$(2,0)$: $\Delta > 0$, $A > 0$ $\Rightarrow$ lokaal minimum

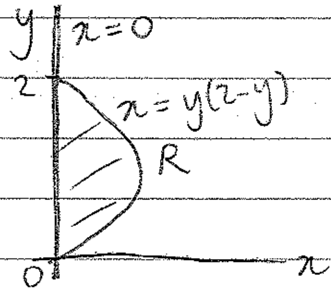
$(1,-3)$: $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ zadelpunt

$(1,3)$: $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ zadelpunt

3

6. $R$ ingesloten door de $y$-as en de kromme $x = y(2-y)$

a)




snijpunten: $\begin{cases} x = 0 \\ y(2-y) = x = 0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow (0,0)$ en $(0,2)$

3

b) oppervlakte: $A = \iint_R 1 \, dA$

$$= \int_0^2 \int_0^{y(2-y)} 1 \, dx \, dy$$

[$R$ is horizontaal enkelvoudig gegeven door

$0 \leq y \leq 2$

$0 \leq x \leq y(2-y)$ ]

$$\Rightarrow A = \int_0^2 [x]_{x=0}^{y(2-y)} dy = \int_0^2 y(2-y) \, dy$$ 4

$$= \int_0^2 (2y - y^2) \, dy = \left[ y^2 - \tfrac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{2}$$

$$= 2^2 - \tfrac{1}{3} \cdot 2^3 = 4 - \tfrac{8}{3} = \tfrac{4}{3}$$ 2

[Alternatief: $R$ is het gebied tussen de $y$-as en de grafiek van $x = y(2-y)$; dit leidt direct tot $A = \int_0^2 y(2-y) \, dy$.]

c) $f(x,y) = y^2$ op $R$

$$\iint_R f(x,y) \, dA = \int_0^2 \int_0^{y(2-y)} y^2 \, dx \, dy$$ 2

$$= \int_0^2 \left[ y^2 x \right]_{x=0}^{y(2-y)} dy$$

$$= \int_0^2 y^2 \cdot y(2-y)\, dy$$

$$= \int_0^2 (2y^3 - y^4)\, dy \qquad 2$$

$$= \left[ 2 \cdot \frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{5} y^5 \right]_{y=0}^{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2^4 - \frac{1}{5} \cdot 2^5$$

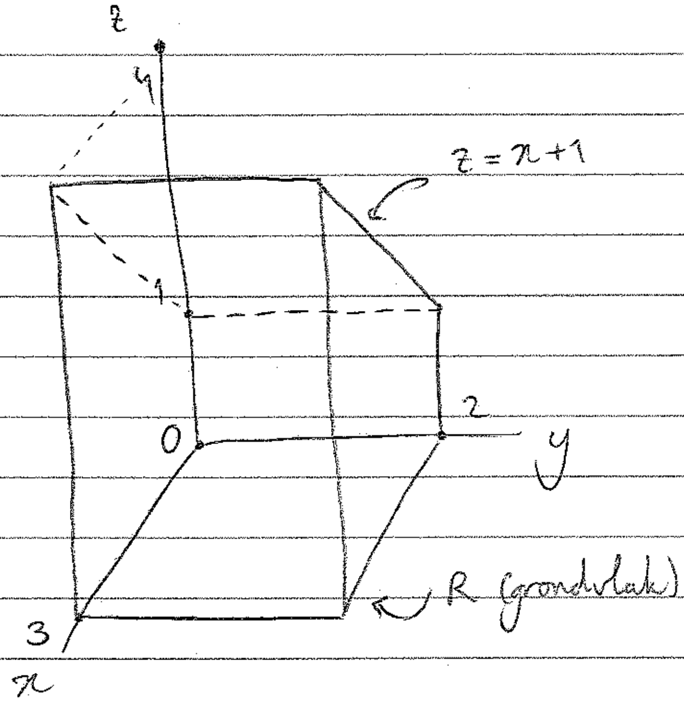
$$= 8 - \frac{32}{5}$$

$$= \frac{8}{5}. \qquad 2$$

7. R: $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$, $z = 0$

T: gebied tussen R en de grafiek van $z(x,y) = x + 1$

a)




5

b) T is enkelvoudig in de z-richting, gegeven door

$0 \le x \le 3$

$0 \le y \le 2$

$0 \le z \le x+1$ 2

Dus $\iiint_T f(x,y,z)\,dV = \iint_R \int_0^{1+x} yz\,dz\,dA$ 2

$= \iint_R \left[\frac{1}{2} y z^2\right]_{z=0}^{x+1} dA$

$= \iint_R \frac{1}{2} y (x+1)^2\,dA$ 1

$= \int_0^3 \int_0^2 \frac{1}{2} y (x+1)^2\,dy\,dx$ 2

$$= \int_0^3 \left[\frac{1}{4}y^2(x+1)^2\right]_{y=0}^2 dx$$

$$= \int_0^3 (x+1)^2\, dx$$

$$= \int_0^3 (x^2+2x+1)\, dx \qquad 2$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_{x=0}^3$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 3^3 + 3^2 + 3$$

$$= 9 + 9 + 3$$

$$= 21. \qquad 1$$