# Deeltentamen 1 Calculus 2 MST

Woensdag 18 december 2019, 9:00–11:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer van Leiden.
- Er zijn **zeven** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
- Het totaal aantal punten is 100, met daarnaast 10 bonuspunten van vraag 7.
- Het cijfer is het aantal punten gedeeld door 10.
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie. Eindantwoorden alleen tellen niet.
- Het gebruik van een grafische rekenmachine is toegestaan.

**1.** (15p.) Gegeven is de functie

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+2}}{x^2-1}.$$

(a) (7p.) Bepaal het (grootste mogelijke) domein van $f$.

(b) (8p.) Stel een vergelijking op van het raakvlak aan de grafiek van $f$ in het punt $(0,2)$.

**2.** (15p.) Gegeven is de functie

$$f(x,y) = x \ln y + \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

(a) (7p.) Bereken de gradiënt van $f$.

(b) (8p.) Bepaal de richtingsafgeleide van $f$ in het punt $(3,1)$ en in de richting van $\langle 4,-3\rangle$.

**3.** (20p.) Bepaal alle globale extreme punten van de functie

$$f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)} - y^2,$$

op het gebied $R$ wat binnen de cirkel rond de oorsprong van straal 2 ligt en rechts van de $y$-as.

**4.** (15p.) Bepaal alle extreme punten van de functie

$$f(x,y) = 6xy - 3xy^2 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2.$$

en klassificeer ze als lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt.

**5.** (20p.) Bereken de integraal

$$\iint_R 4x - 2\,\mathrm{d}A,$$

waarbij $R$ het gebied is ingesloten door de cirkel $x^2+y^2=2$ en de lijnen $x=y$ en $x=0$.

---

**Op de achterkant staan opgave 6 en 7 en een lijst van formules.**

6. (15p.) Bepaal de inhoud van het gebied $T$ in $\mathbb{R}^3$ wat is ingesloten tussen de bolschil $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en de kegel $z = -\sqrt{3x^2 + 3y^2}$.

7. (10p.) *(Bonusvraag)* Verifieer de stelling van Pappos, die zegt dat de inhoud van het omwentelingslichaam $V$ van het oppervlakte onder grafiek van een functie $f$ op een interval $[a, b]$ gegeven wordt door

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \mathrm{d}x,$$

door zelf deze inhoud te berekenen via cilinder-coördinaten.

---

## Formules

### Afgeleiden

$$\begin{aligned}
f(x) = x^a &\implies f'(x) = ax^{a-1}\\
f(x) = \sin x &\implies f'(x) = \cos x\\
f(x) = \cos x &\implies f'(x) = -\sin x\\
f(x) = \tan x &\implies f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\\
f(x) = e^x &\implies f'(x) = e^x\\
f(x) = \ln x &\implies f'(x) = \frac{1}{x} \text{ voor } x > 0\\
f(x) = \arcsin x &\implies f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
f(x) = \arccos x &\implies f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\\
f(x) = \arctan x &\implies f'(x) = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

### Goniometrie

$$\begin{aligned}
1 &= \sin^2\theta + \cos^2\theta\\
\sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta\\
\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\
\cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1\\
\cos(2\theta) &= 1 - 2\sin^2\theta
\end{aligned}$$